ISTITUZIONI DI GEOMETRIA 2018/19

COMPITO 12 GIUGNO 2018

Esercizio 1 (8 punti)**.** Considera il gruppo $\Gamma < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ generato da:

$$f(x,y,z) = (x, y+1, z), \qquad g(x,y,z) = (x,y,z+1),$$
$$h(x,y,z) = (x+1, -y, -z).$$

Mostra che l'azione è libera e propriamente discontinua e che quindi $M = \mathbb{R}^3/_\Gamma$ è una varietà.

(1) M è compatta?
(2) M è orientabile?
(3) M è omeomorfa al 3-toro $S^1 \times S^1 \times S^1$?
(4) Esiste un rivestimento di grado due di M che sia omeomorfo al 3-toro?

Esercizio 2 (8 punti)**.** Sia M una varietà qualsiasi (non necessariamente compatta).

(1) Definisci cos'è una forma volume su M.
(2) Mostra che M ha sempre una forma volume ω tale che $\mathrm{Vol}(M) = \int_\omega M < +\infty$.

Esercizio 3 (8 punti)**.** Sia $q \in S^1 \times S^1$ un punto qualsiasi nel toro. Calcola i numeri di Betti della varietà

$$M = (S^1 \times S^! \setminus \{q\}) \times (S^1 \times S^1 \setminus \{q\}).$$

Esiste una 3-varietà compatta orientabile e senza bordo omotopicamente equivalente a M?

Esercizio 4 (8 punti)**.** Considera il piano iperbolico nel modello del semipiano:

$$H^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, \quad g = \frac{1}{y^2} g^E.$$

(1) Calcola i simboli di Christoffel di questa varietà riemanniana.
(2) Sia v_t il trasporto parallelo di v_0 lungo la curva $\gamma(t) = (t,1)$. Determina l'angolo fra il vettore v_t e l'asse delle ordinate al variare di t. La curva γ è una geodetica?